

Voor- en achternaam: _____

Studierichting en klas: _____

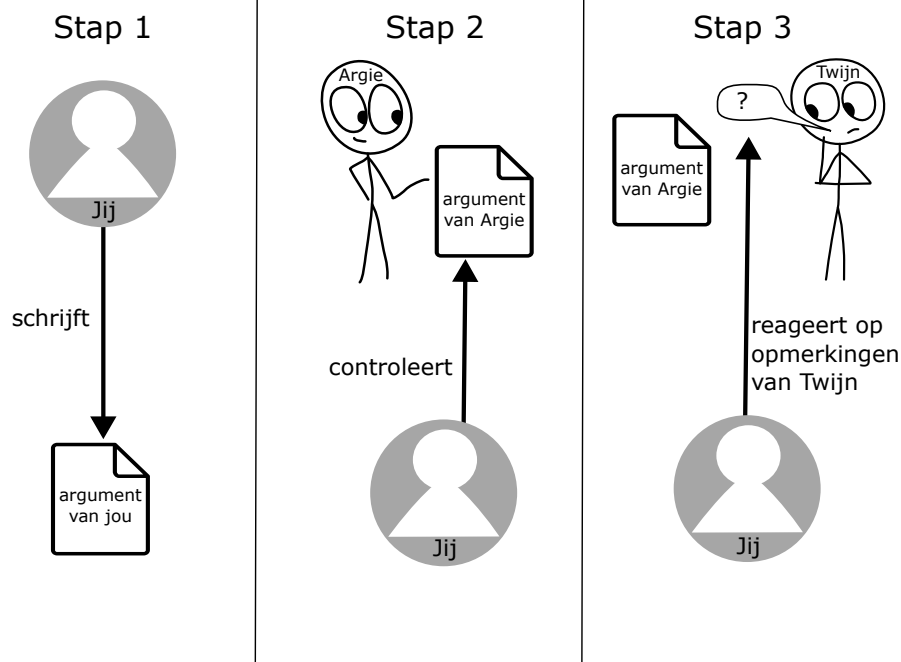
Naam leerkracht: _____

In dit bundeltje krijg je enkele vragen over hoe jij wiskundige argumenten leest en hoe jij zulke argumenten controleert op correctheid. Geen zorgen over 'juist of fout': we willen weten wat jij zelf denkt. Er is meer dan één juist antwoord.

Praktisch

In deze bundel zullen de instructies telkens in een kader staan; jij schrijft je antwoorden in de lege, zwarte kaders. In de volgende pagina's doorlopen we onderstaande drie stappen **twee keer**. Onderaan deze pagina vind je een grafisch overzicht.

1. Je krijgt een open vraag over een wiskundige eigenschap, en je probeert zelf een eigen wiskundig argument neer te schrijven. Geen zorgen als je geen volledig argument vindt! Schrijf dat er dan bij, en ga naar de volgende stap.
2. Je leest een alternatief argument van een fictieve klasgenoot, die "Argie" heet (van 'argumenteren').
3. Een andere fictieve klasgenoot, die "Twijn" heet (van 'twijfelen'), geeft vier opmerkingen op het argument van Argie.



Benodigdheden

Je hebt enkel schrijfmateriaal met verschillende kleurtjes nodig. Je krijgt geen kladpapier; we willen weten wat je denkt, dus schrijf jouw kladpogingen ook op deze bundel. Een geodriehoek en rekenmachine zijn beide niet toegestaan.

Tips

- Als je een antwoord later nog wil aanpassen, **streep dan niets door** maar voeg het toe in een andere kleur.
- Als je niet helemaal zeker bent van je antwoord, schrijf dat er dan bij!

Open vraag 1:

Als je in een driehoek twee middelloodlijnen op de zijden hebt, kunnen die middelloodlijnen dan evenwijdig zijn?

Denk even na over je antwoord.

Probeer ook een correct wiskundig argument op te stellen om een kritische klasgenoot te overtuigen van je antwoord.

Antwoord:**Argument:**

Denk hier maximaal 5 minuten over na, maar ga dan verder, al heb je mogelijk geen volledig antwoord of argument gevonden!

Is jouw neergeschreven argument volgens jou een “bewijs”? Waarom vind je van wel of niet? Leg het uit in het kader hieronder.

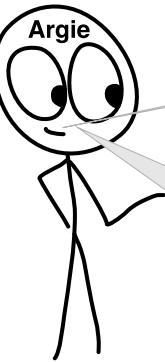
Beoordeling eigen argument+ Waarom:

Nu lees je het argument van klasgenoot Argie hieronder aandachtig na op correctheid en duidelijkheid.

Je mag de tekst 'bewerken': woorden fluoriseren, opmerkingen in de marge schrijven, ...Op de volgende pagina heb je ook een groot kader om je gedachtes tijdens het lezen op te schrijven.

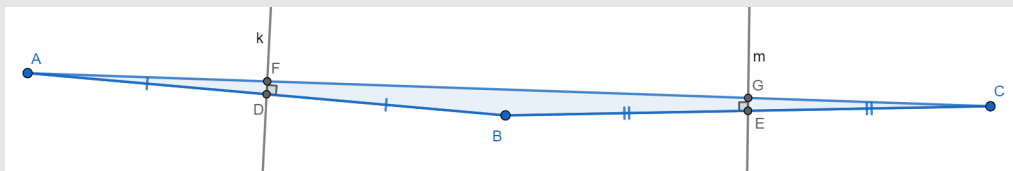
In een driehoek kunnen twee middelloodlijnen niet evenwijdig zijn met elkaar.

Reacties in marge:



En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het wel waar zou zijn. Dan zou er een driehoek $\triangle ABC$ bestaan waarbij bijvoorbeeld de middelloodlijn op $[AB]$ evenwijdig is met de middelloodlijn op $[BC]$. In de afbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Ik toon nu dat zo'n driehoek niet kan. Aangezien k loodrecht staat op AB en k evenwijdig is met m , dan staat AB ook loodrecht op m . En omdat zowel AB als BC loodrecht staan op m , zijn ze evenwijdig. Maar dan zouden de twee rechten AB en BC gelijk zijn (want dan zouden de rechten samenvallen), maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de driehoeken van daarnet moet dus wel kloppen.

Je mag je neergeschreven reacties veranderen, maar **streep je niets door en gebruik geen Tipp-Ex**. Gebruik dan een andere kleur en schrijf het erbij!

Waar je aan dacht *tijdens* het lezen:

Na het lezen van Argie's argument op de vorige bladzijde, duid je hieronder je finale beoordeling van zijn argument aan.

	Helemaal Niet akkoord	Niet akkoord	Ik weet het niet	Akkoord	Helemaal akkoord
Het argument is wiskundig correct.	☐	☐	☐	☐	☐
Het argument zou een kritische klasgenoot overtuigen.	☐	☐	☐	☐	☐
Ik aanvaard het argument.	☐	☐	☐	☐	☐
Het argument is een wiskundig bewijs.	☐	☐	☐	☐	☐

Leg in het onderstaande kader je gekleurde bolletjes uit. Bijvoorbeeld: Waarom vond je het argument wel/niet correct? En wel/niet overtuigend?
In het tweede kader kan je goede en/of slechte zaken oplijsten van Argie's argument. (niet verplicht)

Verklaring beoordeling Argie's argument:

Goede en/of slechte zaken van Argie's argument:

We bekijken vervolgens vier opmerkingen van klasgenoot Twijn op het argument van klasgenoot Argie. Die opmerkingen vind je telkens op de rechterpagina in de komende pagina's.

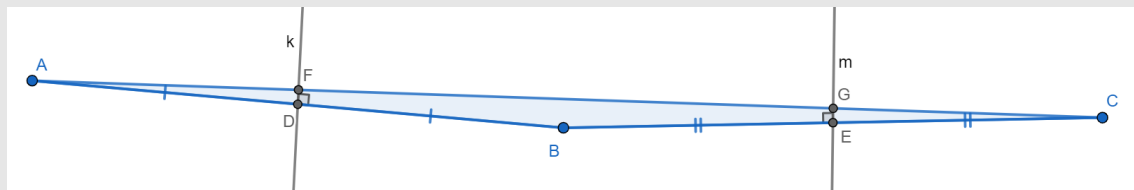
Klasgenoot Argie dacht ook na over de driehoeken, en hij zegt:

In een driehoek kunnen twee middelloodlijnen niet evenwijdig zijn met elkaar.

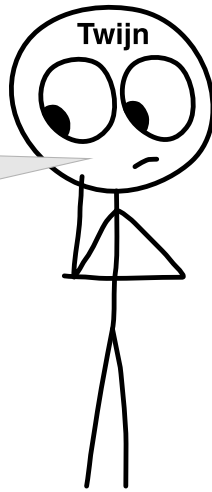


En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het wel waar zou zijn. Dan zou er een driehoek $\triangle ABC$ bestaan waarbij bijvoorbeeld de middelloodlijn op $[AB]$ evenwijdig is met de middelloodlijn op $[BC]$. In de afbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Ik toon nu dat zo'n driehoek niet kan. Aangezien k loodrecht staat op AB en k evenwijdig is met m , dan staat AB ook loodrecht op m . En omdat zowel AB als BC loodrecht staan op m , zijn ze evenwijdig. Maar dan zouden de twee rechten AB en BC gelijk zijn (want dan zouden de rechten samenvallen), maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de driehoeken van daarnet moet dus wel kloppen.

**Opmerking 1.1:**

Dit argument begint door aan te nemen dat twee middelloodlijnen evenwijdig kunnen zijn, maar dat is helemaal niet zo! (Ik heb het omcirkeld.) Je mag helemaal niet beginnen met iets dat niet waar is!

Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

Waarom wel/niet?:

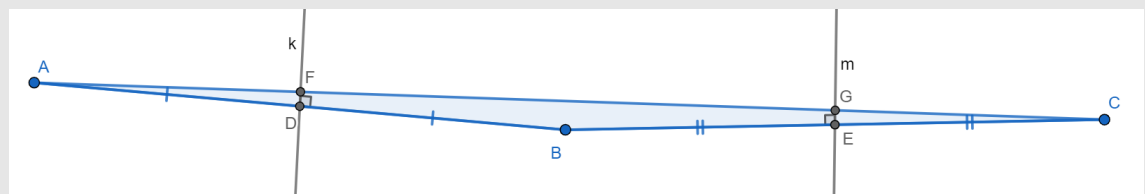
Klasgenoot Argie dacht ook na over de driehoeken, en hij zegt:

In een driehoek kunnen twee middelloodlijnen niet evenwijdig zijn met elkaar.



En Argie geeft het volgende argument:

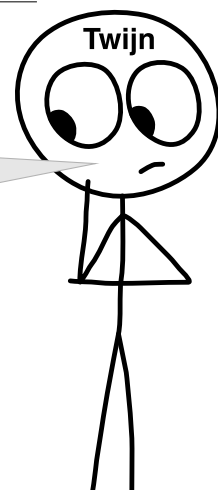
Stel dat het wel waar zou zijn. Dan zou er een driehoek $\triangle ABC$ bestaan waarbij bijvoorbeeld de middelloodlijn op $[AB]$ evenwijdig is met de middelloodlijn op $[BC]$. In de afbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Ik toon nu dat zo'n driehoek niet kan. Aangezien k loodrecht staat op AB en k evenwijdig is met m , dan staat AB ook loodrecht op m . En omdat zowel AB als BC loodrecht staan op m , zijn ze evenwijdig. Maar dan zouden de twee rechten AB en BC gelijk zijn (want dan zouden de rechten samenvallen), maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de driehoeken van daarnet moet dus wel kloppen.

Opmerking 1.2:

In het argument gebruikt Argie een vreemde driehoek. (Ik heb de schets omcirkeld.) Zulke figuren mag je niet gebruiken!



Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

Waarom wel/niet?:

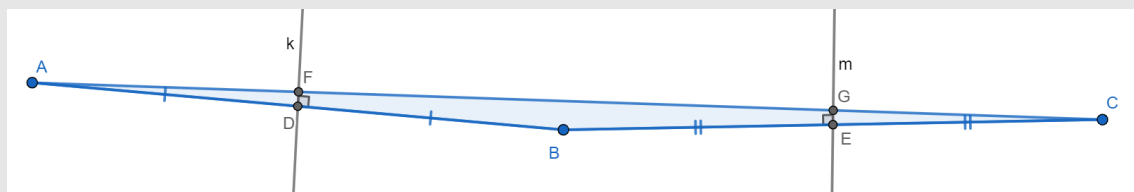
Klasgenoot Argie dacht ook na over de driehoeken, en hij zegt:

In een driehoek kunnen twee middelloodlijnen niet evenwijdig zijn met elkaar.



En Argie geeft het volgende argument:

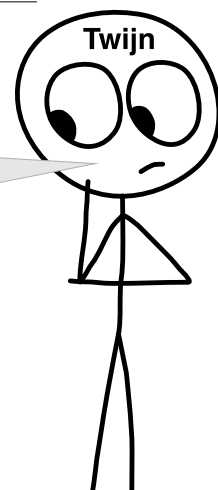
Stel dat het wel waar zou zijn. Dan zou er een driehoek $\triangle ABC$ bestaan waarbij bijvoorbeeld de middelloodlijn op $[AB]$ evenwijdig is met de middelloodlijn op $[BC]$. In de afbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Ik toon nu dat zo'n driehoek niet kan. Aangezien k loodrecht staat op AB en k evenwijdig is met m , dan staat AB ook loodrecht op m . En omdat zowel AB als BC loodrecht staan op m , zijn ze evenwijdig. Maar dan zouden de twee rechten AB en BC gelijk zijn (want dan zouden de rechten samenvallen), maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de driehoeken van daarnet moet dus wel kloppen.

Opmerking 1.3:

Argie zegt hier dat het onmogelijk is dat AB en BC gelijk zijn. Dat is toch niet “onmogelijk”! (Ik heb het omcirkeld.)



Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

Waarom wel/niet?:

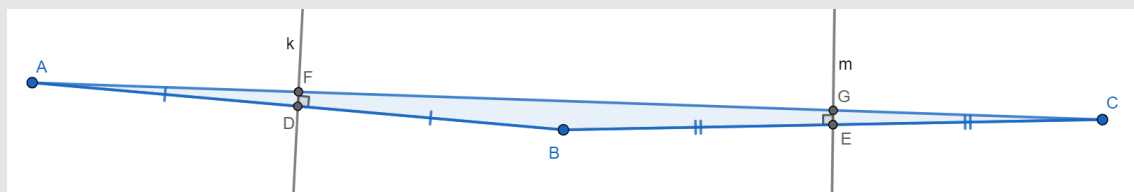
Klasgenoot Argie dacht ook na over de driehoeken, en hij zegt:

In een driehoek kunnen twee middelloodlijnen niet evenwijdig zijn met elkaar.

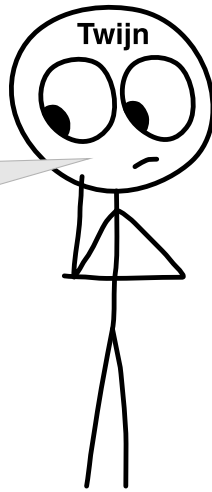


En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het wel waar zou zijn. Dan zou er een driehoek $\triangle ABC$ bestaan waarbij bijvoorbeeld de middelloodlijn op $[AB]$ evenwijdig is met de middelloodlijn op $[BC]$. In de afbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Ik toon nu dat zo'n driehoek niet kan. Aangezien k loodrecht staat op AB en k evenwijdig is met m , dan staat AB ook loodrecht op m . En omdat zowel AB als BC loodrecht staan op m , zijn ze evenwijdig. Maar dan zouden de twee rechten AB en BC gelijk zijn (want dan zouden de rechten samenvallen), maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de driehoeken van daarnet moet dus wel kloppen.

**Opmerking 1.4:**

Op het einde van het argument zegt Argie dat het onmogelijk is dat AB en BC gelijk zouden zijn, en dan beëindigt hij zijn uitleg. (Ik heb het omcirkeld.) Ik denk dat je net moet zoeken naar je fout als je iets onmogelijks uitkomt, in plaats van te besluiten dat de originele uitspraak “In een driehoek kunnen twee middelloodlijnen niet evenwijdig zijn met elkaar.” aangetoond is.

Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

Waarom wel/niet?:

Open vraag 2:

Kan je een ruit maken waarbij twee overstaande hoeken een verschillende grootte hebben?

Denk even na over je antwoord.

Probeer ook een correct wiskundig argument op te stellen om een kritische klasgenoot te overtuigen van je antwoord.

Antwoord:**Argument:**

Denk hier maximaal 5 minuten over na, maar ga dan verder, al heb je mogelijk geen volledig antwoord of argument gevonden!

Is jouw neergeschreven argument volgens jou een “bewijs”? Waarom vind je van wel of niet? Leg het uit in het kader hieronder.

Beoordeling eigen argument+ Waarom:

Nu lees je het argument van klasgenoot Argie hieronder aandachtig na op correctheid en duidelijkheid.

Je mag de tekst 'bewerken': woorden fluoriseren, opmerkingen in de marge schrijven, ...Op de volgende pagina heb je ook een groot kader om je gedachtes tijdens het lezen op te schrijven.

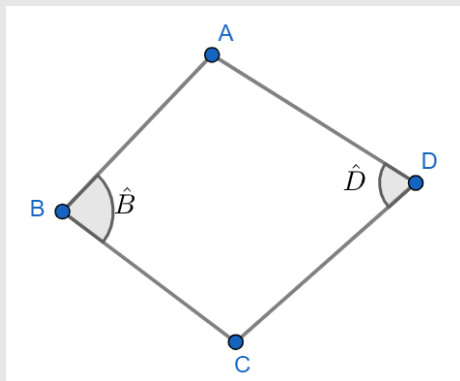
In een ruit zijn de overstaande hoeken even groot.

Reacties in marge:

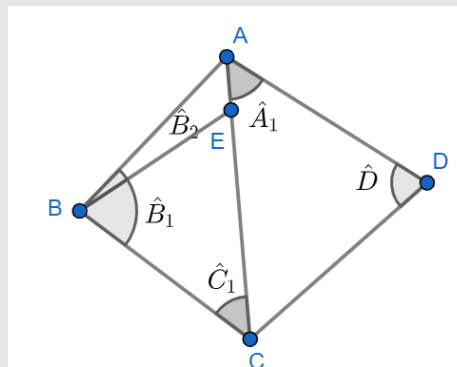


En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het niet waar zou zijn. Dan zou er een ruit $ABCD$ bestaan waarbij bijvoorbeeld $\hat{D}$ kleiner is dan $\hat{B}$. In de linkerafbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Schets van ruit $ABCD$ met $\hat{D}$ kleiner dan $\hat{B}$



Dezelfde schets met bijgetekend lijnstuk en punt

Ik toon nu dat zo'n ruit niet kan. Daarvoor teken ik enkele extra dingen in de rechterafbeelding. Ik teken eerst de diagonaal $[AC]$. Als ik de kleinere hoek $\hat{D}$ inpas in grotere hoek $\hat{B}$, dan vind ik daardoor een nieuw punt E op de diagonaal, zodat dus $\hat{B}_1 = \hat{D}$. Als je dan E met B verbindt, dan vind je twee driehoeken: $\triangle ADC$ en $\triangle CBE$. Die driehoeken zijn congruent, want

- $\hat{B}_1 = \hat{D}$
- $|BC| = |DA|$, want in een ruit zijn alle zijden even lang
- $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$, want dit zijn verwisselende binnenhoeken bij evenwijdigen AD en BC met snijlijn AC

Door congruentietekenmerk HZH is $\triangle EBC$ congruent met $\triangle CDA$. Maar dan zouden overeenkomstige zijden even lang moeten zijn, zoals $|EC| = |CA|$, maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de ruiten van daarnet moet dus wel kloppen.

Je mag je neergeschreven reacties veranderen, maar **streep je niets door en gebruik geen Tipp-Ex**. Gebruik dan een andere kleur en schrijf het erbij!

Waar je aan dacht *tijdens* het lezen:

Na het lezen van Argie's argument op de vorige bladzijde, duid je hieronder je finale beoordeling van zijn argument aan.

	Helemaal Niet akkoord	Niet akkoord	Ik weet het niet	Akkoord	Helemaal akkoord
Het argument is wiskundig correct.	☐	☐	☐	☐	☐
Het argument zou een kritische klasgenoot overtuigen.	☐	☐	☐	☐	☐
Ik aanvaard het argument.	☐	☐	☐	☐	☐
Het argument is een wiskundig bewijs.	☐	☐	☐	☐	☐

Leg in het onderstaande kader je gekleurde bolletjes uit. Bijvoorbeeld: Waarom vond je het argument wel/niet correct? En wel/niet overtuigend?
In het tweede kader kan je goede en/of slechte zaken oplijsten van Argie's argument. (niet verplicht)

Verklaring beoordeling Argie's argument:

Goede en/of slechte zaken van Argie's argument:

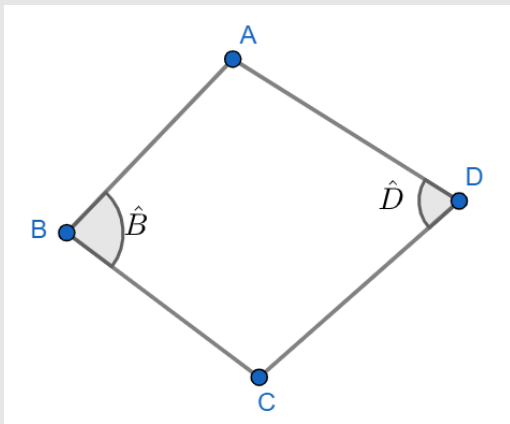
We bekijken vervolgens vier opmerkingen van klasgenoot Twijn op het argument van klasgenoot Argie. Die opmerkingen vind je telkens op de rechterpagina in de komende pagina's.

Klasgenoot Argie dacht ook na over de ruiten, en hij zegt:

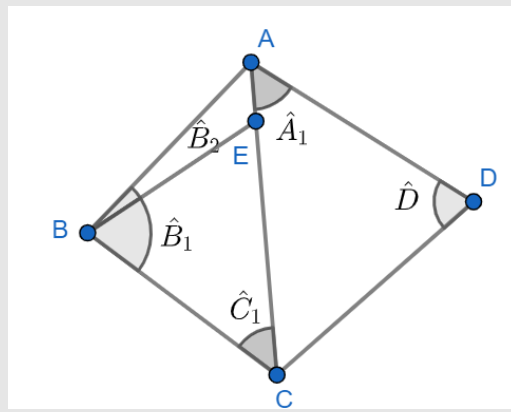
In een ruit zijn de overstaande hoeken even groot.

En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het niet waar zou zijn. Dan zou er een ruit $ABCD$ bestaan waarbij bijvoorbeeld $\hat{D}$ kleiner is dan $\hat{B}$. In de linker afbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Schets van ruit $ABCD$ met $\hat{D}$ kleiner dan $\hat{B}$

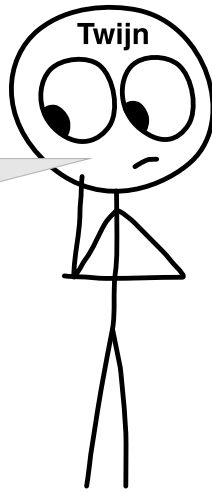


Dezelfde schets met bijgetekend lijnstuk en punt

Ik toon nu dat zo'n ruit niet kan. Daarvoor teken ik enkele extra dingen in de rechter afbeelding. Ik teken eerst de diagonaal $[AC]$. Als ik de kleinere hoek $\hat{D}$ inpas in grotere hoek $\hat{B}$, dan vind ik daardoor een nieuw punt E op de diagonaal, zodat dus $\hat{B}_1 = \hat{D}$. Als je dan E met B verbindt, dan vind je twee driehoeken: $\triangle ADC$ en $\triangle CBE$. Die driehoeken zijn congruent, want

- $\hat{B}_1 = \hat{D}$
- $|BC| = |DA|$, want in een ruit zijn alle zijden even lang
- $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$, want dit zijn verwisselende binnenhoeken bij evenwijdigen AD en BC met snijlijn AC

Door congruentiekenmerk HZH is $\triangle EBC$ congruent met $\triangle CDA$. Maar dan zouden overeenkomstige zijden even lang moeten zijn, zoals $|EC| = |CA|$, maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de ruiten van daarnet moet dus wel kloppen.

**Opmerking 2.1:**

Het argument begint met aan te nemen dat in een ruit twee overstaande hoeken verschillend kunnen zijn, wat eigenlijk niet waar is...(Ik heb het omcirkeld.) Je mag dan dus geen andere meetkundige eigenschappen meer gebruiken, als je vertrekt van iets dat niet waar is!

Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

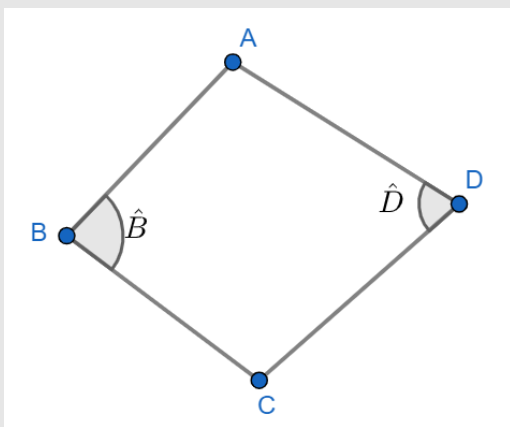
Waarom wel/niet?:

Klasgenoot Argie dacht ook na over de ruiten, en hij zegt:

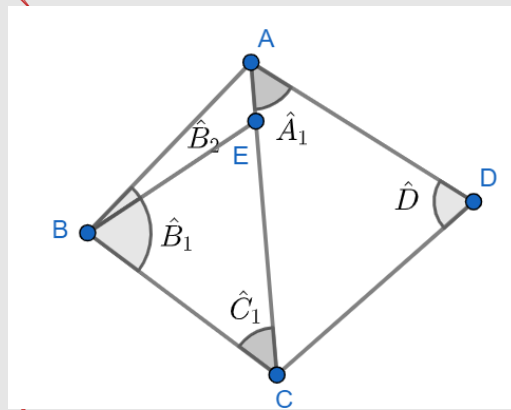
In een ruit zijn de overstaande hoeken even groot.

En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het niet waar zou zijn. Dan zou er een ruit $ABCD$ bestaan waarbij bijvoorbeeld $\hat{D}$ kleiner is dan $\hat{B}$. In de linkerafbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Schets van ruit $ABCD$ met $\hat{D}$ kleiner dan $\hat{B}$



Dezelfde schets met bijgetekend lijnstuk en punt

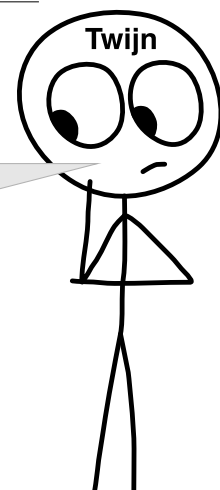
Ik toon nu dat zo'n ruit niet kan. Daarvoor teken ik enkele extra dingen in de rechterafbeelding. Ik teken eerst de diagonaal $[AC]$. Als ik de kleinere hoek $\hat{D}$ inpas in grotere hoek $\hat{B}$, dan vind ik daardoor een nieuw punt E op de diagonaal, zodat dus $\hat{B}_1 = \hat{D}$. Als je dan E met B verbindt, dan vind je twee driehoeken: $\triangle ADC$ en $\triangle CBE$. Die driehoeken zijn congruent, want

- $\hat{B}_1 = \hat{D}$
- $|BC| = |DA|$, want in een ruit zijn alle zijden even lang
- $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$, want dit zijn verwisselende binnenhoeken bij evenwijdigen AD en BC met snijlijn AC

Door congruentiekenmerk HZH is $\triangle EBC$ congruent met $\triangle CDA$. Maar dan zouden overeenkomstige zijden even lang moeten zijn, zoals $|EC| = |CA|$, maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de ruiten van daarnet moet dus wel kloppen.

Opmerking 2.2:

In het argument gebruikt Argie een ruit met twee overstaande hoeken van verschillende grootte. (Ik heb de schets omcirkeld.) Dat is dan net een tegenvoorbeeld van de uitspraak “In een ruit zijn de overstaande hoeken even groot.”!



Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

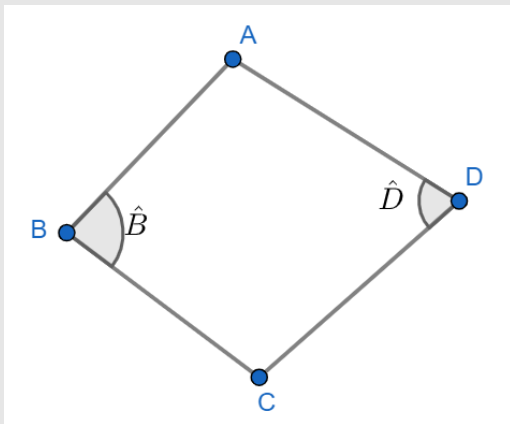
Waarom wel/niet?:

Klasgenoot Argie dacht ook na over de ruiten, en hij zegt:

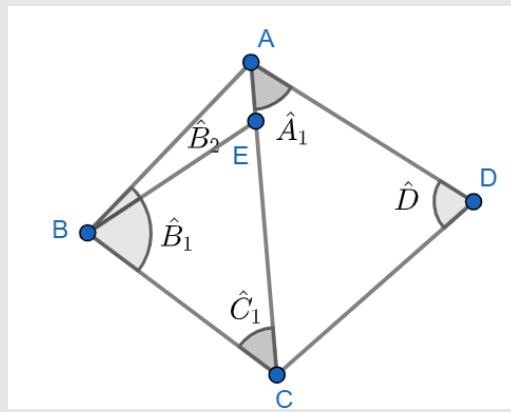
In een ruit zijn de overstaande hoeken even groot.

En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het niet waar zou zijn. Dan zou er een ruit $ABCD$ bestaan waarbij bijvoorbeeld $\hat{D}$ kleiner is dan $\hat{B}$. In de linkerafbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Schets van ruit $ABCD$ met $\hat{D}$ kleiner dan $\hat{B}$

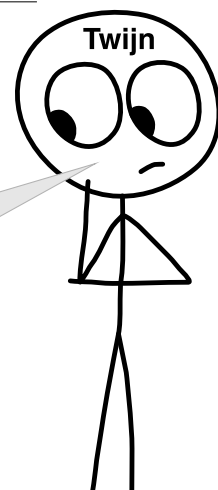


Dezelfde schets met bijgetekend lijnstuk en punt

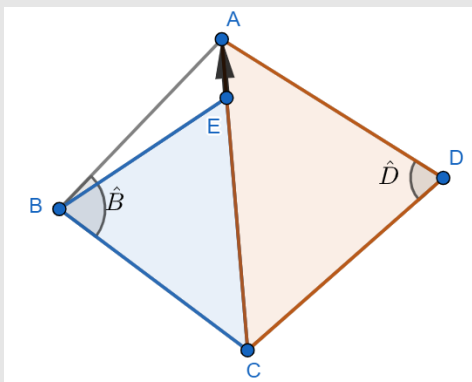
Ik toon nu dat zo'n ruit niet kan. Daarvoor teken ik enkele extra dingen in de rechterafbeelding. Ik teken eerst de diagonaal $[AC]$. Als ik de kleinere hoek $\hat{D}$ inpas in grotere hoek $\hat{B}$, dan vind ik daardoor een nieuw punt E op de diagonaal, zodat dus $\hat{B}_1 = \hat{D}$. Als je dan E met B verbindt, dan vind je twee driehoeken: $\triangle ADC$ en $\triangle CBE$. Die driehoeken zijn congruent, want

- a) $\hat{B}_1 = \hat{D}$
- b) $|BC| = |DA|$, want in een ruit zijn alle zijden even lang
- c) $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$, want dit zijn verwisselende binnenhoeken bij evenwijdigen AD en BC met snijlijn AC

Door congruentiekenmerk HZH is $\triangle EBC$ congruent met $\triangle CDA$. Maar dan zouden overeenkomstige zijden even lang moeten zijn, zoals $|EC| = |CA|$, maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de ruiten van daarnet moet dus wel kloppen.

**Opmerking 2.3:**

Argie komt hier uit dat $|EC| = |CA|$ en noemt het “onmogelijk” (ik omcirkelde het), maar het is wel mogelijk! Het punt E valt eigenlijk samen met A , en dan is inderdaad $|EC| = |CA|$.



Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

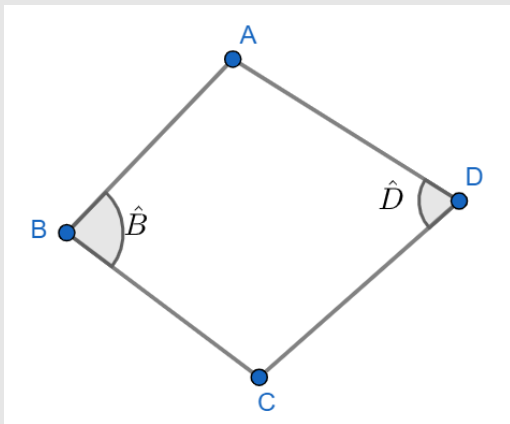
Waarom wel/niet?:

Klasgenoot Argie dacht ook na over de ruiten, en hij zegt:

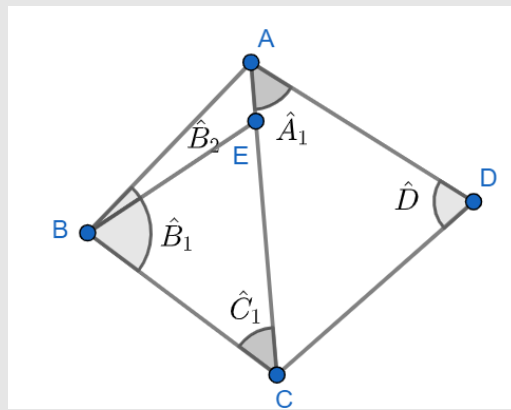
In een ruit zijn de overstaande hoeken even groot.

En Argie geeft het volgende argument:

Stel dat het niet waar zou zijn. Dan zou er een ruit $ABCD$ bestaan waarbij bijvoorbeeld $\hat{D}$ kleiner is dan $\hat{B}$. In de linkerafbeelding hieronder maakte ik daar een schets van.



Schets van ruit $ABCD$ met $\hat{D}$ kleiner dan $\hat{B}$



Dezelfde schets met bijgetekend lijnstuk en punt

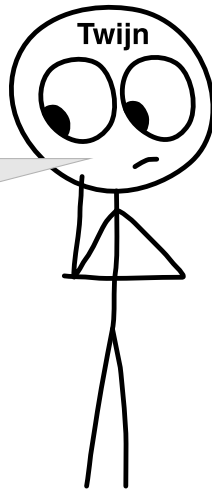
Ik toon nu dat zo'n ruit niet kan. Daarvoor teken ik enkele extra dingen in de rechterafbeelding. Ik teken eerst de diagonaal $[AC]$. Als ik de kleinere hoek $\hat{D}$ inpas in grotere hoek $\hat{B}$, dan vind ik daardoor een nieuw punt E op de diagonaal, zodat dus $\hat{B}_1 = \hat{D}$. Als je dan E met B verbindt, dan vind je twee driehoeken: $\triangle ADC$ en $\triangle CBE$. Die driehoeken zijn congruent, want

- $\hat{B}_1 = \hat{D}$
- $|BC| = |DA|$, want in een ruit zijn alle zijden even lang
- $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$, want dit zijn verwisselende binnenhoeken bij evenwijdigen AD en BC met snijlijn AC

Door congruentiekenmerk HZH is $\triangle EBC$ congruent met $\triangle CDA$. Maar dan zouden overeenkomstige zijden even lang moeten zijn, zoals $|EC| = |CA|$, maar dat is onmogelijk. Mijn bewering over de ruiten van daarnet moet dus wel kloppen.

Opmerking 2.4:

Het klopt niet hoe Argie het argument afsluit (met de zin die ik aanduidde). Het is niet omdat hij iets onmogelijks uitkomt over E en A , dat daarom ook de originele uitspraak “In een ruit zijn de overstaande hoeken even groot.” aangetoond is.



Denk na over Twijns opmerking. Beantwoord dan de vragen hieronder:

Ga je akkoord met Twijns opmerking?:

Waarom wel/niet?: